JOURNAL OF ALGEBRA 23, 263–270 (1972)

Décomposition primaire des modules

CONSTANTIN NĂSTĂSESCU

ET

TOMA ALBU

Universite de Bucarest, Facultatea de Matematică-Mecanică, Bucharest, Romania

Communicated by Guido Zappa

Received April 4, 1971

INTRODUCTION

Soit A un anneau commutatif en unitaire, $\mathscr{S}$ l'ensemble des A-modules simples non-isomorphes. Un A-module M est de torsion [4] si tout image homomorphe de M contient un A-module simple. La classe $\mathscr{T}$ de A-modules de torsion possède les propriétés suivantes:

(i) $\mathscr{T}$ est stable par sommes directes quelconque,

(ii) Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de A-modules, on a: $M \in \mathscr{T}$ si et seulement si $M', M'' \in \mathscr{T}$.

Suivant Gabriel [7, p. 372] $\mathscr{T}$ est une sous-catégorie localisante.

Si M est un A-module, il existe le plus grand sous-module de torsion de M, qu'on denote avec M_T. M_T sera appelé "le partie torsionné du module M".

Si $S \in \mathscr{S}$ l'A-module M sera appelé S-primaire si tout image homomorphe de M contient un sous-module simple isomorphe à S. La classe $\mathscr{T}_S$ des A-modules qui sont S-primaire est tout de même une sous-catégorie localisante.

Si M est un A-module, il existe le plus grand sous-module S-primaire de M, qu'on denote avec M_S. M_S sera appelé la composante S-primaire du module. On voit aisément que, si M' est un sous-module de M, on a:

$$M_S' = M' \cap M_S .$$

Un A-module de torsion M, admet une décomposition primaire [4, 5, 8] si:

$$M = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} M_S .$$

Si tout A-module de torsion admet une décomposition primaire, on dit que A est un T-anneau [4].

Dans le travail-ci, on reprend le problème de la décomposition primaire des modules, en utilisant des procédés de [10] qui nous permettent de mettre en évidence la classe des A-modules de torsion, qui admettent une décomposition primaire (Théorème 2.2, 2.3). On donne une caractérisation simple des T-anneaux (Théorème 2.4) permettant de mettre en évidence des nombreuses classes d'anneaux qui sont T-anneau (Corollaire 2.3).

1. Définition et résultats préliminaires

Soit A un anneau commutatif unitaire et M un A-module. Dans [2, Exercices 17, p. 165], on dit qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est faiblement associé à M s'il existe un $x \in M$ tel que $\mathfrak{p}$ soit un élément minimal de l'ensemble des idéaux premiers contenant ann(x), ann$(x) = \{\lambda \in A \mid \lambda x = 0\}$. On désigne par $\mathrm{ass}_f(M)$ l'ensemble des idéaux faiblement associés à M. Un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ est dit associé à M s'il existe $x \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x)$, on note par ass$(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

Par supp(M) on note l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ avec la propriété que $M_\mathfrak{p} \neq 0$ ($M_\mathfrak{p}$ module de fractions de M par rapport à $\mathfrak{p}$).

Nous notons par $F_\mathscr{T}$ l'ensemble

$$F_\mathscr{T} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \text{ idéal de } A \text{ telque } A/\mathfrak{a} \in \mathscr{T}\}$$

$F_\mathscr{T}$ a les propriétés:

(i) Si $\mathfrak{a} \in F_\mathscr{T}$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ alors $\mathfrak{b} \in F_\mathscr{T}$

(ii) Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in F_\mathscr{T}$ alors $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \in F_\mathscr{T}$

(iii) Si $\mathfrak{a} \in F_\mathscr{T}$ et $x \in A$ alors $\{\mathfrak{a} : x\} = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in \mathfrak{a}\} \in F_\mathscr{T}$

(iv) Si $\mathfrak{a} \subset A$ et existe $\mathfrak{b} \in F_\mathscr{T}$ tel que $\{\mathfrak{a} : x\}$ pour tout alors $\mathfrak{a} \in F_\mathscr{T}$.

D'après [7, p. 413] $F_\mathscr{T}$ est un système topologisant et idempotent.

Rappelons qu'un anneau A est semi-artinien [9] si tout A-module est de torsion.

Si M est un A-module on nomme socle de M et on note par $S_0(M)$ la somme de sous-modules simples de M.

Si $S \in \mathscr{S}$ alors $I_S(M)$ représent la somme de sous-modules simples de M isomorphes avec S et on nomme la composante isotypique de type S.

Un sous-module N de M est essentiel si pour tout $P \subset M$

$$P \neq 0, \qquad P \cap N \neq 0.$$

Lemme 1.1. *$\mathfrak{a} \in F_\mathscr{T}$ si et seulement si $A/\mathfrak{a}$ est un anneau semi-artinien.*

LEMME 1.2. [10]. *Soient A un anneau commutatif unitaire, M un A-module tel que $S_0(M)$ soit essentiel dans M. Alors si $a \in A$ l'homothétie a_M de rapport a dans M est un monomorphisme si et seulement si a n'appartient à aucun idéal de* ass(M).

PROPOSITION 1.1. *Si M est un A-module de torsion ($M \in \mathscr{T}$) alors:*

(1) $\operatorname{ass}_f(M) = \{m \mid m$ *ideal maximal tel que* $\exists\, x \in M,\, x \neq 0,\, m \supset \operatorname{ann}(x)\}$

(2) $\operatorname{ass}_f(M) = \operatorname{supp}(M)$

(3) $\operatorname{ass}_f(M) \supseteq \operatorname{ass}(M)$

(4) $\displaystyle\bigcup_{m \in \operatorname{ass}_f(M)} m = \bigcup_{m \in \operatorname{ass}(M)} m.$

Démonstration. Si $x \in M$, $x \neq 0$, $\operatorname{ann}(x) \in F_{\mathscr{T}}$ donc $A/\operatorname{ann}(x)$ est un anneau semi-artinien. Comme tout idéal premier dans un anneau semi-artinien est maximal [9, Theorem 3.1] il résulte (1).

(2) résulte de [2, l'exercice 17f, p. 165].

(3) est toujours vérifié.

(4) résulte du Lemme 1.2 et l'exercice 17b, p. 165 [2].

On dit qu'un A-module M est *finiment associé* si ass(M) est un ensemble fini˙ Si M est un A-module de torsion ($M \in \mathscr{T}$), alors il est finiment associé si et seulement si $S_0(M)$ contient un nombre fini de composantes isotypiques.

PROPOSITION 1.2. *Si M est un A-module de torsion et finiment associé, alors:*

$$\operatorname{ass}_f(M) = \operatorname{ass}(M) = \operatorname{supp}(M).$$

Pour la démonstration voir la Proposition 2.2 [10].

COROLLAIRE 1.1. *Si*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est un suite exacte de A-modules de torsion, alors M est finiment associé si et seulement si M' et M'' sont finiment associé. Dans ce cas:

$$\operatorname{ass}(M) = \operatorname{ass}(M') \cup \operatorname{ass}(M'').$$

Pour la démonstration voir la Proposition 3.1 [10].

Observation 1.1. La dernière formule montre que si M est un A-module de torsion tel que $S_0(M)$ ait un nombre fini de composantes isotypiques, alors pour tout module quotient M'', tout A-module simple contenu dans M'' est isomorphe à un simple de $S_0(M)$.

Un anneau A commutatif et unitaire s'appelle parfait [3] si tout A-module admet un recouvrement projectif.

D'après Corollaire 3.8 [9] un anneau est parfait si et seulement si il est semi-artinien et spec A = {l'ensemble des idéaux premiers}, est fini.

Corollaire 1.2. *Si A est un anneau semi-artinien tel que* ass(A) *est fini, alors il est parfait.*

Démonstration. Si m est un idéal premier, il est maximal (l'anneau étant semi-artinien). Tenant compte d'observation 1.1, $S = A/\mathfrak{m} = S_0(A/\mathfrak{m})$ est isomorphe à un A-module simple de $S_0(A)$. Comme ass(A) est finie, il résulte que spec A = ass(A) et donc A est parfait.

Nous notons par:

$$F_{\mathscr{P}} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \text{ idéal de } A, \text{ tel que } A/\mathfrak{a} \text{ est un anneau parfait}\}$$

$F_{\mathscr{P}}$ a les propriétés:

(i) Si $\mathfrak{a} \in F_{\mathscr{P}}$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{b} \in F_{\mathscr{P}}$,

(ii) Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in F_{\mathscr{P}}$ alors $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \in F_{\mathscr{P}}$,

(iii) Si $\mathfrak{a} \in F_{\mathscr{P}}$ et $x \in A$ alors $\{\mathfrak{a} : x\} \in F_{\mathscr{P}}$.

2. Les résultats principaux

Théorème 2.1. *Si A est un anneau commutatif et unitaire, M un A-module de torsion et $\{M_S\}$ les composantes primaires de M, alors la somme de sous-modules M_S est directe et M est un extension essentielle de $\sum M_S$.*

Démonstration. M étant A-module de torsion, il résulte que $S_0(M)$ est essentielle dans M. Comme $S_0(M) \subset \sum M_S$ alors M est un extension essentielle de $\sum M_S$.

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathscr{S}$ et $M_{S_k} \cap (\sum_{i \neq k} M_{S_i}) \neq 0$ alors

$$S_0\left(M_{S_k} \cap \left(\sum_{i \neq k} M_{S_i}\right)\right) \neq 0$$

donc il existe un A-module simple S tel que $S \subset M_{S_k} \cap (\sum_{i \neq k} M_{S_i})$, d'où $S \subset M_{S_k}$ et $S \subset M_{S_l}$ $(l \neq k)$ donc $S \simeq S_k$ et $S \simeq S_l$ ce qui contredit l'hypothèse.

Théorème 2.2. *Soit A un anneau commutatif et unitaire*

Si M est un A-module de torsion, finiment associé, alors M admet une décomposition primaire:

$$M = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} M_S .$$

En vue de la démonstration on va rappeler le lemme suivant:

LEMME 2.1. *Si M est un A-module de torsion et de type fini, alors:* $\operatorname{ann}(M) = \{\lambda \in A \mid \lambda M = 0\} \in F_{\mathscr{T}}$. *Si en plus M est finiment associé, alors M admet une décomposition primaire.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une famille de génerateurs de M, alors: $\operatorname{ann}(M) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{ann}(x_i)$. Comme $\operatorname{ann}(x_i) \in F_{\mathscr{T}}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ alors $\operatorname{ann}(M) \in F_{\mathscr{T}}$.

Si M est finiment associé, alors l'anneau $B = A/\operatorname{ann}(M)$ est semi-artinien avec $\operatorname{ass}(B)$ fini, donc parfait (Corollaire 1.2). D'après [3], B est un produit fini des anneaux parfaits locaux et par suite le B-module M admet une décomposition primaire, donc A-module M admet une décomposition primaire.

Démonstration du Théorème 2.2. Soit $x \in M$ de la Lemme 2.1, il résulte que

$$Ax = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} (Ax)_S .$$

Comme $(Ax)_S = Ax \cap M_S$ alors $Ax \subset \sum_{S \in \mathscr{S}} M_S$ donc $M = \sum_{S \in \mathscr{S}} M_S$.

THÉORÈME 2.3. *Si A est un anneau commutatif unitaire et M un A-module de torsion, alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) *M admet une décomposition primaire.*

(2) *M est limite inductive de modules de torsion finiment associés.*

(3) *Pour tout $x \in M$, $x \neq 0$,* $\operatorname{ann}(x) \in F_{\mathscr{P}}$.

Démonstration. Soit $M = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} M_S$ et $M' \subset M$ un sous-module de type fini. Il existe $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathscr{S}$ tel que $M' \subset \bigoplus_{i=1}^{n} M_{S_i}$; comme M_{S_i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont finiment associé alors d'après Corollaire 1.1, M' est finiment associé d'où résulte (1) $\Rightarrow$ (2). (2) $\Rightarrow$ (3).

D'après le Corollaire 1.1 nous avons: $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ où M_α est finiment associé pour tout $\alpha \in I$. Si $x \in M$, $x \neq 0$ alors, il existe $\alpha_0 \in I$, $x \in M_{\alpha_0}$ donc Ax est finiment associé, donc $A/\operatorname{ann}(x)$ est parfait (Corollaire 1.2). (3) $\Rightarrow$ (1). M est une extension essentielle de $\sum M_S$ (Théorème 2.1). Si $x \in M$, $x \neq 0$, $\operatorname{ann}(x) \in F_{\mathscr{P}}$ donc Ax admet une décomposition primaire: $Ax = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} (Ax)_S$. Comme $(Ax)_S = Ax \cap M_S$ alors $Ax \subset \sum_{S \in \mathscr{S}} M_S$ donc $M = \sum_{S \in \mathscr{S}} M_S$.

COROLLAIRE 2.1. *Soit la suite exacte*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

de A-modules torsionés. Si M admet une décomposition primaire, alors M' et M'' admettent une décomposition primaire.

COROLLAIRE 2.2. *Si A est un anneau commutatif, alors tout A-module artinien admet une décomposition primaire.*

THÉORÈME 2.4. *Si A est un anneau commutatif, alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) *Tout A-module de torsion, admet une décomposition primaire,*

(2) $F_{\mathscr{P}} = F_{\mathscr{T}}$,

(3) $\left(\prod_{S\in\mathscr{S}} S/\oplus \sum_{S\in\mathscr{S}} S\right)_T = 0.$

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (2) résulte du Théorème 2.3.

(2) $\Rightarrow$ (3). $(\prod_{S\in\mathscr{S}} S/\oplus\sum_{S\in\mathscr{S}} S)_T = 0$ est équivalente avec,

$$\bigoplus_{S\in\mathscr{S}} S = \left(\prod_{S\in\mathscr{S}} S\right)_T.$$

Soit $x \in (\prod_{S\in\mathscr{S}} S)_T$, alors, si $x \notin \oplus_{S\in\mathscr{S}} S$, alors $\operatorname{ann}(x)$ est contenu dans un nombre infini d'idéaux maximaux, donc $\operatorname{spec}(A/\operatorname{ann}(x))$ est un ensemble infini, donc $A/\operatorname{ann}(x)$ est un anneau non-parfait.

(3) $\Rightarrow$ (2). Soit $\mathfrak{a} \in F_{\mathscr{T}}$, alors l'anneau $B = A/\mathfrak{a}$ est semi-artinien. Si $R(B)$ est le radical de Jacobson de l'anneau B, alors $B/R(B)$ est régulier au sens de von Neumann et semi-artinien (Théorème 4.1 of [9]).

Comme $R(B) = \bigcap_{\alpha\in I} \mathfrak{m}_\alpha$ où m_α sont des idéaux maximaux, alors

$$B/R(B) \subset \prod_{\alpha\in I} A/\mathfrak{m}_\alpha.$$

Comme $B/R(B)$ est un A-module de torsion, il résulte

$$B/R(B) = (B/R(B))_T \subset \left(\prod_{\alpha\in I} A/\mathfrak{m}_\alpha\right)_T = \bigoplus_{\alpha\in I} A/\mathfrak{m}_\alpha$$

donc B est un anneau parfait.

Remarque. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) du théorème précédent a été donnée par Dickson [4].

COROLLAIRE 2.3. (1) *Tout l'anneau laskerian* [2, Chap. IV, exercices] *est un T-anneau.*

(2) *Tout l'anneau semi-local est T-anneau.*

(3) *Tout FGS anneau* [11] *est T-anneau.*

(4) *Un anneau A avec la propriété que* Spec A *avec la topologie de Zarinski est un space topologique noetherien,* [6] *est un T-anneau,*

(5) *Tout l'anneau de valuation est T-anneau.*

(6) *Un anneau A pour lequel tout l'idéal maximal est de type fini, est un T-anneau.*

Démonstration. (1) Soit $\mathfrak{a} \in F_{\mathscr{T}}$ l'anneau étant laskerien, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ où $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ sont idéaux primaires. $A/\mathfrak{a}$ étant semi-artinien, alors $\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \ldots, \sqrt{\mathfrak{q}_n}$ sont idéaux maximaux donc $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ est un anneau semi-simple [1]. Comme $\sqrt{\mathfrak{a}}/\mathfrak{a}$ est le radical de Jacobson de l'anneau $A/\mathfrak{a}$ alors $A/\mathfrak{a}$ est parfait.

(2) Est évident.

(3) Si $\mathfrak{a} \in F_{\mathscr{T}}$ alors $S_0(A/\mathfrak{a})$ est un A-module de longueur fini, donc $A/\mathfrak{a}$ est parfait d'après le Corollaire 1.2.

(4) Si $\mathfrak{a} \in F_{\mathscr{T}}$ comme spec A est un space noetherien alors $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p}_1) \cup V(\mathfrak{p}_2) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_n)$ (voir les notations de [6]) où $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sont les idéaux premiers. Il résulte que $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ d'où $A/\mathfrak{a}$ est un anneau parfait.

(5) Est un cas particulier de (3).

(6) Si $\mathfrak{a} \in F_{\mathscr{T}}$, dans l'anneau $A/\mathfrak{a}$ tout idéal premier est de type fini, donc noetherien, et d'après le Corollaire 2.1 [9] $A/\mathfrak{a}$ est un anneau artinien.

REFERENCES

1. N. BOURBAKI, "Algèbre," Chap. 7 et 8, Hermann, Paris, 1958.
2. N. BOURBAKI, "Algèbre Commutative," Chap. 3 et 4, Hermann, Paris, 1961.
3. H. BASS, Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 466–494.
4. S. E. DICKSON, Decomposition of modules II rings without chain conditions, *Math. Z.* **104** (1968), 349–357.
5. S. E. DICKSON, A torsion theory for abelian categories, *Trans. Amer. Math. Soc.* **121** (1966), 223–235.
6. A. GROTHENDIECK, "Éléments de Géométrie Algébrique," Vol. I, 1960.

7. P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 325–448.
8. J. FUELBERTH, On commutative splitting rings, *Proc. London Math. Soc.* **20** (1970), 393–408.
9. C. NĂSTĂSESCU AND N. POPESCU, Anneaux semi-artiniens, *Bull. Soc. Math. France* **96** (1968), 357–368.
10. C. NĂSTĂSESCU, Décomposition primaire dans les anneaux semi-artiniens, *J. Algebra* **14** (1970), 170–181.
11. R. P. KURSHAN, Rings whose cyclic modules have finitely generated socle, *J. Algebra* **15** (1970), 376–386.